Recasages possibles : 144, 170, 171
Référence : Carnet de voyage en Algébrie, Caldero, Peronnier (p. 119-122).

Développement

Théorème 1 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. On écrit $P = \prod_{i=1}^{t}(X-\alpha_i)^{m_i}$ avec les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, et $m_i \geqslant 1$. On considère la forme quadratique q sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donnée par

$$\forall R \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ q(R) = \sum_{i=1}^{t} m_i R(\alpha_i)^2.$$

Alors, la signature de q est $(r+s, s)$ où r est le nombre de racines réelles distinctes de P, et s est la moitié du nombre de racines complexes non réelles distinctes de P.

- *Étape 1* : On commence par vérifier que q est bien une forme quadratique. Introduisons quelques notations. Soit $I = \{i \in [\![1,t]\!] \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ de cardinal r. Comme P est à coefficients réels, si $i \notin I$, alors α_i et $\overline{\alpha_i}$ sont racines de P avec même multiplicité. Ainsi partitionnons $[\![1,t]\!] \setminus I$ en deux sous-ensembles J et J^* de même cardinal s tels que à tout $j \in J$, on peut faire correspondre un unique $j^* \in J^*$ de sorte que $\alpha_{j^*} = \overline{\alpha_j}$ et réciproquement. Posons enfin

$$b : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (R,S) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{t} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i) \end{array} \right.$$

Cette application (a priori à valeurs dans $\mathbb{C}$) est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. En effet, si $j \in J$, d'après ce qui précède, on a $m_{j^*} = m_j$, donc pour $R, S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\begin{aligned} b(R,S) &= \sum_{i=1}^{t} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i) \\ &= \sum_{i\in I} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i) + \sum_{j \in J} m_j R(\alpha_j) S(\alpha_j) + \sum_{k \in J^*} m_k R(\alpha_k) S(\alpha_k) \\ &= \sum_{i\in I} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i) + \sum_{j \in J} m_j \big(R(\alpha_j) S(\alpha_j) + R(\overline{\alpha_j}) S(\overline{\alpha_j})\big) \end{aligned}$$

Or, si $i \in I$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, et comme R, S sont à coefficients réels, la première somme est réelle. De plus, si $j \in J$, $R(\overline{\alpha_j}) = \overline{R(\alpha_j)}$ et de même pour S, donc la deuxième somme est en fait égale à

$$\sum_{j\in J} m_j \big(R(\alpha_j) S(\alpha_j) + \overline{R(\alpha_j) S(\alpha_j)}\big) = \sum_{j\in J} 2 m_j \mathfrak{Re}\big(R(\alpha_j) S(\alpha_j)\big)$$

et est donc réelle, ce qui montre que b est à valeurs dans $\mathbb{R}$. On voit de plus que b est bilinéaire symétrique (c'est assez clair) et que pour tout $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $q(R) = b(R,R)$. Ceci justifie que q est bien une forme quadratique réelle sur l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- *Étape 2* : On cherche à exprimer q sous la forme d'une somme de carrés de formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ce qui permettra d'en déduire sa signature. Notons que $q = \sum_{i=1}^{t} m_i \mathrm{ev}_{\alpha_i}^2$ où ev_{α_i} est l'application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ das $\mathbb{C}$ d'évaluation en α_i (ATTENTION : ce n'est pas une forme linéaire, n'étant pas à valeurs dans $\mathbb{R}$ en général). Pour ramener les choses dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varphi_i = \mathrm{ev}_{\alpha_i} & \text{si} & i \in I \\ \varphi_j = \frac{\mathrm{ev}_{\alpha_j} + \mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}}}{2} = \mathfrak{Re}(\mathrm{ev}_{\alpha_j}) & \text{si} & j \in J \\ \varphi_k = \frac{\mathrm{ev}_{\alpha_k} - \mathrm{ev}_{\alpha_j}}{2i} = \mathfrak{Im}(\mathrm{ev}_{\alpha_k}) & \text{si} & k \in J^* \text{ et } k = j^* \end{array} \right.$$

de sorte que pour tout $i \in [\![1,t]\!]$, $\varphi_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^*$. Pour $j \in J$, on a

$$\begin{aligned} 2\varphi_j^2 - 2\varphi_{j^*}^2 &= 2\frac{1}{4}(\mathrm{ev}_{\alpha_j} + \mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}})^2 + 2\frac{1}{4}(\mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}} - \mathrm{ev}_{\alpha_j})^2 \\ &= \frac{1}{2}(2\mathrm{ev}_{\alpha_j}^2 + 2\mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}}^2 + 2\mathrm{ev}_{\alpha_j}\mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}} - 2\mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}}\mathrm{ev}_{\alpha_j}) \\ &= \mathrm{ev}_{\alpha_j}^2 + \mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}}^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} q = \sum_{i=1}^{t} m_i \mathrm{ev}_{\alpha_i}^2 &= \sum_{i\in I} m_i \mathrm{ev}_{\alpha_i}^2 + \sum_{j \in J} m_j (\mathrm{ev}_{\alpha_j}^2 + \mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}}^2) \\ &= \sum_{i\in I} m_i \varphi_i^2 + \sum_{j\in J} 2 m_j \varphi_j^2 - \sum_{k \in J^*} 2 m_k \varphi_k^2. \end{aligned}$$

- *Étape 3* : Il ne nous reste plus qu'à montrer que les formes linéaires φ_i sont bien linéairement indépendantes, et on aura terminé. Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_t \varphi_t = 0.$$

On a par définition (attention à ne pas confondre le i complexe de l'indice i)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\varphi_i &= \sum_{i\in I}\lambda_i \mathrm{ev}_{\alpha_i}+\frac{1}{2}\sum_{j\in J}\lambda_j(\mathrm{ev}_{\alpha_j}+\mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}})+\frac{1}{2i}\sum_{j^*\in J^*}\lambda_{j^*}(\mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}}-\mathrm{ev}_{\alpha_j})\\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i \mathrm{ev}_{\alpha_i}+\sum_{j\in J}\frac{\lambda_j+i\lambda_{j^*}}{2}\mathrm{ev}_{\alpha_j}+\sum_{j^*\in J^*}\frac{\lambda_j-i\lambda_{j^*}}{2}\mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}}\end{aligned}$$

On est donc en présence d'une combinaison $\mathbb{C}$-linéaire de la famille $(\mathrm{ev}_{\alpha_i})_{i\in[\![1,t]\!]}$, c'est donc une égalité dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]^*$. Or, $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ étant deux à deux distincts, la famille $(\mathrm{ev}_{\alpha_i})_{i\in[\![1,t]\!]}$ est la famille duale de la famille libre $(L_i)_{i\in[\![1,t]\!]}$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $\alpha_1,\dots,\alpha_t$. Ainsi, $(\mathrm{ev}_{\alpha_i})_{i\in[\![1,t]\!]}$ est une famille libre. Attention, avant de conclure que les coefficients de cette combinaison $\mathbb{C}$-linéaire sont nuls, il faut justifier pourquoi $\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\varphi_k=0$ dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]^*$, sachant que c'est le cas dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$. Si $Q\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on peut écrire $Q=Q_1+iQ_2$ avec $Q_1\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q_2\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et alors

$$\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\varphi_k(Q)=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\varphi_k(Q_1)+i\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\varphi_k(Q_2)=0+i0=0.$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\varphi_k$ est nul en tant qu'élément de $\mathbb{C}_{n-1}[X]^*$, donc par liberté de $(\mathrm{ev}_{\alpha_i})_{i\in[\![1,t]\!]}$, les coefficients de la combinaison $\mathbb{C}$-linéaire nulle ci-dessus sont nuls. On a donc pour tous $i\in I$, $j\in J$,

$$\lambda_i=0 \quad ; \quad \frac{\lambda_j+i\lambda_{j^*}}{2}=0 \quad ; \quad \frac{\lambda_j-i\lambda_{j^*}}{2}=0,$$

ce qui implique directement que $\lambda_i=0$ pour tout $i\in[\![1,t]\!]$, puis que $(\varphi_i)_{i\in[\![1,t]\!]}$ est libre. Finalement, on a bien décomposé q en somme de carré de formes linéaires indépendantes donc on peut lire sa signature sur cette décomposition. Comme les m_i sont strictement positifs, on a

$$\mathrm{sign}(q)=(\#I+\#J,\#J^*)=(r+s,s).$$

En particulier, connaissant la signature (p_+,p_-) de q, on peut en déduire le nombre de racines distinctes de P en calculant

$$\mathrm{rang}(q)=p_++p_-=r+2s,$$

et également le nombre de racines réelles distinctes de P, en calculant

$$p_+-p_-=r+s-s=r.$$

Commentaires et prolongements :

- Ce théorème semble intéressant pour connaître des informations sur les racines d'un polynôme réel P, mais énoncé comme tel, il semble inutilisable. En effet, pour calculer la forme quadratique q avec sa définition, il nous faut connaître les formes ev_{α_i}, ou autrement dit les racines α_i de P, c'est-à-dire exactement ce que l'on cherche. On peut contourner ce problème en obtenant une autre expression pour q : Pour $k\in\mathbb{N}$, on note s_k les sommes de Newton de P, définies par

$$s_k=\sum_{i=1}^{t}m_i\alpha_i^k.$$

Ces expressions étant symétriques en les racines de P (lorsqu'on les considère avec leurs multiplicités) on sait que les s_k sont des polynômes en les fonctions symétriques élémentaires en les α_i, donc des polynômes en les coefficients de P (d'après les relations coefficients-racines). Ainsi, on peut calculer les s_k sans connaître les α_i (par des formules dites de Newton). Par ailleurs, si $R\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est le polynôme donné par $R(X)=a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$, alors on a

$$\begin{aligned}q(R)=q(a_0,\dots,a_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{t}m_i\big(a_{n-1}\alpha_i^{n-1}+\cdots+a_0\big)^2\\ &= \sum_{i=1}^{t}m_i\sum_{k,l=0}^{n-1}a_ka_k\alpha_i^{k+l}\\ &= \sum_{k,l=0}^{n-1}a_ka_l\sum_{i=1}^{t}m_i\alpha_i^{k+l}\\ &= \sum_{k,l=0}^{n-1}s_{k+l}a_ka_l.\end{aligned}$$

On obtient bien une expression de q sur $\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est calculable à partir seulement des coefficients de P.

Une autre façon de faire le lien avec les sommes de Newton et de montrer qu'on peut calculer q sans connaître au préalable les racines de P consiste à déterminer la matrice de q dans la base canonique $\mathcal{B}=\big(1,X,\dots,X^{n-1}\big)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En effet, si b est la forme polaire de q, et si $i,j \in [\![0,n-1]\!]$ on a

$$b\big(X^i, X^j\big) = \sum_{k=1}^{t} m_k \alpha_k^i \alpha_k^j = \sum_{k=1}^{t} m_k \alpha_k^{i+j} = s_{i+j}.$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = (s_{i+j})_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}$ et on peut donc réduire q simplement en connaissant les sommes de Newton de P, qui sont comme dit plus haut des polynômes en ses coefficients.

- On peut chercher à voir ce que ce résultat donne si P est de degré 2 (et espérer retrouver les résultats classiques). On note $P = X^2 + bX + c$ avec $b, c \in \mathbb{R}$ et on note $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ses racines (avec multiplicité). Calculons les sommes de Newton associées pour $k \in \{0,1,2\} = \{k+l \mid 0 \leqslant k, l \leqslant 1\}$. On a

$$s_0 = 1 + 1 = 2,\ s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = -b,$$

et

$$s_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = b^2 - 2c.$$

Ainsi, la forme quadratique à étudier est $q(a_0, a_1) = 2a_0^2 - 2ba_0a_1 + (b^2-2c)a_1^2$. L'algorithme de Gauss appliqué à q donne

$$\begin{array}{rcl} q(a_0,a_1) & = & 2(a_0^2 - ba_0a_1) + (b^2-2c)a_1^2 \\ & = & 2\big((a_0 - \frac{b}{2}a_1)^2 - \frac{b^2}{4}a_1^2\big) + (b^2-2c)a_1^2 \\ & = & 2\big(a_0 - \frac{b}{2}a_1\big)^2 + \frac{1}{2}(b^2-4c)a_1^2. \end{array}$$

On voit donc trois cas possibles :

- Si $b^2 - 4c = 0$, alors $\mathrm{sign}(q) = (1,0)$ donc d'après le **Théorème 1**, P a $1+0=1$ racine dans $\mathbb{C}$ et $2\times 0 = 0$ racine non réelle donc l'unique racine de P est réelle.
- Si $b^2 - 4c > 0$, alors $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$ donc P a $2+0=2$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$ et aucune racine non réelle donc deux racines réelles distinctes.
- Si $b^2 - 4c < 0$, alors $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$ donc P a $1+1=2$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$ et 2×1 racines non réelles.

On retrouve dans tous les cas les résultats bien connus sur les racines d'un polynôme réel de degré 2 (ouf !).